1. Методом деления отрезка пополам найти корень уравнения $4\left(1-x^2\right)-e^x=0.676$
с точностью = 10^{-3}.

Решение : `

Эта задача эквивалентна решению уравнения $\left(1-x^2\right)-e^x-0.676=0$, или нахождению нуля функции $f(x)=4\left(1-x^2\right)-e^x-0.676$.

В качестве начального отрезка $[a0, b0]$ возьмем отрезок $[0, 1]$. На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками :

$f(0)=2.324>0$, $f(1)=-3.394<0$.

Найдем число n делений отрезка $[0, 1]$, необходимых для достижения требуемой точности.

Имеем : $\left|x_n-x^*\right| \le \frac{1-0}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-3}$;

$2^{n+1} \ge 10^3$;

$n+1 \ge 10$;

$n \ge 9$;

Следовательно, не позднее 9 - го деления значение x найдем с требуемой точностью,
Результаты вычислений представлены в таблице

n	a_n	b_n	x_n	Знак $f(a_n)$	Знак $f(b_n)$	$f(x_n)$	$\lvert b_n-a_n\rvert$
0	0	1	0.5	"+"	"-"	0.675	1
1	0.5	1	0.75	"+"	"-"	-1.0430	0.5
2	0.5	0.75	0.625	"+"	"-"	-0.1067	0.25
3	0.5	0.625	0.5625	"+"	"-"	0.3033	0.125
4	0.5625	0.625	0.5937	"+"	"-"	0.1031	0.0625
5	0.5937	0.625	0.6094	"+"	"-"	-0.0006	0.0312
6	0.5937	0.6094	0.6016	"+"	"-"	0.0515	0.0156
7	0.6016	0.6094	0.6055	"+"	"-"	0.0255	0.0078
8	0.6055	0.6094	0.6074	"+"	"-"	0.0125	0.0039
9	0.6075	0.6094	0.6084	"+"	"-"	0.0059	0.0019
10	0.6084	0.6094	0.6089	"+"	"-"	0.0026	0.00097

Корень уравнения $x=0.609\pm0.001$;

--

2. Методом Зейделя решить систему уравнений с точностью $\epsilon=0.001$.

$$A=\begin{pmatrix}6.876 & 2.876 & 1.876\\ 2.876 & 6.176 & -0.824\\ 1.876 & -0.824 & 7.876\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}17.226\\ 11.226\\ 17.476\end{pmatrix};$$

Решение : `

$6.876\,x1+2.876\,x2+1.876\,x3=17.226$;

$2.876\,x1+6.176\,x2-0.824\,x3=11.226$;

$1.876\,x1-0.824\,x2+7.876\,x3=17.476$;

$$\begin{cases}6.876\,x1+2.876\,x2+1.876\,x3=17.226\\ 2.876\,x1+6.176\,x2-0.824\,x3=11.226;\\ 1.876\,x1-0.824\,x2+7.876\,x3=17.476\end{cases}$$

Система приводится к виду

$$\begin{cases}x1_{k+1}=2.5052-0.4182\,x2_k-0.2728\,x3_k\\ x2_{k+1}=1.8177-0.4657\,x1_{k+1}+0.1334\,x3_k\\ x3_{k+1}=2.2189-0.2382\,x1_{k+1}+0.1047\,x2_{k+1}\end{cases};$$

$\beta=0.4657$; $\beta_2=0.2728$;

В качестве начального приближения выбираются элементы столбца свободных членов .

$x1_0 = 2.5052;\; x2_0 = 1.8177;\; x3_0 = 2.2189;$

Проведем теперь итерации методом Зейделя : `

$x1_1 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.8177 - 0.2728 \times 2.2189 = 1.1397;$

$x2_1 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.1397 + 0.1334 \times 2.2189 = 1.5829;$

$x3_1 = 2.2189 - 0.23821 \times 0.1397 + 0.1047 \times 1.5829 = 2.3514;$

$|x1_1 - x1_0| = |1.1397 - 2.5052| = 1.3655;$

$|x2_1 - x2_0| = |1.5829 - 1.8177| = 0.2348;$

$|x3_1 - x3_0| = |2.3514 - 2.2189| = 0.1325;$

$\max |xi_1 - xi_0| = 1.3655;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max \left| xi_1 - xi_0 \right| = \frac{0.4657}{1 - 0.2728} 1.3655 = 0.87 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_2 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.5829 - 0.2728 \times 2.3514 = 1.2018;$

$x2_2 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.2018 + 0.1334 \times 2.3514 = 1.5717;$

$x3_2 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.2018 + 0.1047 \times 1.5717 = 2.0972;$

$|x1_2 - x1_1| = |1.2018 - 1.1397| = 0.0621;$

$|x2_2 - x2_1| = |1.5717 - 1.5829| = 0.0112;$

$|x3_2 - x3_1| = |2.0972 - 2.3514| = 0.2542;$

$\max |xi_2 - xi_1| = 0.2542;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max \left| xi_2 - xi_1 \right| = \frac{0.4657}{1 - 0.2728} 0.2542 = 0.16 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_3 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.5717 - 0.2728 \times 2.0972 = 1.2758;$

$x2_3 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.2758 + 0.1334 \times 2.0972 = 1.5033;$

$x3_3 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.2758 + 0.1047 \times 1.5033 = 2.0724;$

$|x1_3 - x1_2| = |1.2758 - 1.2018| = 0.074;$

$|x2_3 - x2_2| = |1.5033 - 1.5717| = 0.0684;$

$|x3_3 - x3_2| = |2.0724 - 2.0972| = 0.0248;$

$\max |xi_1 - xi_0| = 0.074;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max \left| xi_3 - xi_2 \right| = \frac{0.4657}{1 - 0.2728} 0.074 = 0.047 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_3 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.5033 - 0.2728 \times 2.0724 = 1.3112;$

$x2_3 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.3112 + 0.1334 \times 2.0724 = 1.4835;$

$x3_3 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.3112 + 0.1047 \times 1.4835 = 2.0619;$

$|x1_3 - x1_2| = |1.3112 - 1.2758| = 0.0354;$

$|x2_3 - x2_2| = |1.4835 - 1.5033| = 0.0198;$

$|x3_3 - x3_2| = |2.0619 - 2.0724| = 0.0105;$

$\max |xi_1 - xi_0| = 0.0354;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max \left| xi_3 - xi_2 \right| = \frac{0.4657}{1 - 0.2728} 0.0354 = 0.0227 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_3 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.4835 - 0.2728 \times 2.0619 = 1.3223;$

$x2_3 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.3223 + 0.1334 \times 2.0619 = 1.4770;$

$x3_3 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.3223 + 0.1047 \times 1.4770 = 2.0586;$

$|x1_3 - x1_2| = |1.3223 - 1.3112| = 0.0111;$

$|x2_3 - x2_2| = |1.4770 - 1.4835| = 0.0065;$

$|x3_3 - x3_2| = |2.0586 - 2.0619| = 0.0033;$

$\max |xi_1 - xi_0| = 0.0111;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta} \max \left| xi_3 - xi_2 \right| = \frac{0.4657}{1 - 0.2728} 0.0111 = 0.0071 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_3 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.4770 - 0.2728 \times 2.0586 = 1.3259;$

$x2_3 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.3259 + 0.1334 \times 2.0586 = 1.4748;$

$x3_3 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.3259 + 0.1047 \times 1.4748 = 2.0575;$

$|x1_3 - x1_2| = |1.3259 - 1.3223| = 0.0036;$

$|x2_3 - x2_2| = |1.4748 - 1.4770| = 0.0022;$

$|x3_3 - x3_2| = |2.0575 - 2.0586| = 0.0011;$

$\max|xi_1 - xi_0| = 0.0036;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta}\max\left|xi_3 - xi_2\right| = \frac{0.4657}{1-0.2728}\,0.0036 = 0.0023 > 0.001$$

Делаем еще одну итерацию

$x1_3 = 2.5052 - 0.4182 \times 1.4748 - 0.2728 \times 2.0575 = 1.3272;$

$x2_3 = 1.8177 - 0.4657 \times 1.3272 + 0.1334 \times 2.0575 = 1.4741;$

$x3_3 = 2.2189 - 0.23821 \times 1.3272 + 0.1047 \times 1.4741 = 2.0571;$

$|x1_3 - x1_2| = |1.3272 - 1.3259| = 0.0013;$

$|x2_3 - x2_2| = |1.4741 - 1.4748| = 0.0007;$

$|x3_3 - x3_2| = |2.0571 - 2.0575| = 0.0004;$

$\max|xi_1 - xi_0| = 0.0013;$

$$\frac{\beta_2}{1-\beta}\max\left|xi_3 - xi_2\right| = \frac{0.4657}{1-0.2728}\,0.0013 = 0.0008 < 0.001$$

Решение системы : $x1 = 1.327 \pm 0.001$, $x2 = 1.4741 \pm 0.001$, $x3 = 2.0571 \pm 0.001$;

---

3. Вычислить $e^{0.676\,x}$ с точностью 0.001,

разложив функцию в степенной ряд.

Решение:

Разложение функция в степенной ряд в

окрестности точки x_0=0 имеет вид:

$$e^{s\,x} = 1 + s\,x + \frac{s^2 x^2}{2} + \frac{s^3 x^3}{6} + \frac{s^4 x^4}{24} \ldots;$$

$e^{0.676\,x} \approx 1 + 0.676\,x \approx 1.22533 \approx 1.2253;$

$e^{0.676\,x} \approx 1 + 0.676\,x + 0.228488\,x^2 \approx 1.25072 \approx 1.2507$ с точностью $0.0254 > 0.001$;

$e^{0.676\,x} \approx 1 + 0.676\,x + 0.228488\,x^2 + 0.051486\,x^3 \approx 1.25263 \approx 1.2526$ с точностью $0.0019 > 0.001$;

$e^{0.676\,x} \approx 1 + 0.676\,x + 0.228488\,x^2 + 0.051486\,x^3 + 0.00870113\,x^4 \approx 1.25274 \approx 1.2527$ с точностью $0.0001 < 0.001$;

Ответ: $e^{0.676\,x} \approx 1.2527$ с точностью $0.0001 < 0.001$;

---

4. Вычислить приближенно по формуле средних прямоугольников интеграл $\int_0^1 \frac{x}{1+0.676\,x}\,dx$ при $n = 4$ и оценить погрешность результата.

Решение:

Расчет интеграла по формуле средних прямоугольников:

n	1	2	3	4
x_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
$f[x_i]$	0.1153	0.2992	0.4394	0.5498

$$I_{cp}=h\sum_{i=0}^{n-1} f[x_i]=\frac{1}{4}(0.1153+0.2992+0.4394+0.5498)=0.3221;$$

Оценим погрешность полученного значения. Имеем:

$$f''[x] = -\frac{1.352}{(1+0.676\,x)^3}$$

Нетрудно убедиться, что $\max|f''[x]| = 1.352$.

$$\left|I - I_{cp}\right| \le \frac{1\times 1.352}{24}\,0.25^2 = 0.0035;$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+0.676\,x}\,dx = 0.3221 \pm 0.0035;$$

----

5. Методом Эйлера найти численное решение задачи Коши $y' = 1.352\,y;\ y(0) = 1$, на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h = 0.2$. Сравнить с точным решением.

Решение: `

Шаг $h = 0.2$. Тогда $n = \frac{1-0}{0.2} = 5$.

Расчетная формула метода Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + 0.2\times 1.352\,y_i$$
$$y_{i+1} = 1.2704\,y_i$$

Решение представим в виде таблицы

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	1.000	1.270	1.614	2.050	2.605	3.309

Точное решение исходного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 1.352\,y;$$
$$\frac{dy}{y} = 1.352\,dx;$$
$$\int \frac{1}{y}\,dy = 1.352\int dx;$$
$$\ln[y] = 1.352\,x + \ln[C];$$
$$y = C\,e^{1.352\,x};$$
$$1 = C\,e^{1.352\times 0};$$
$$C = 1;$$

С начальными условиями решение имеет вид: `

$$y = e^{1.352\,x};$$

Точное решение представим в виде таблицы

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$y(t_i)$	1.000	1.310	1.717	2.251	2.950	3.865

Из таблицы видно, что погрешность составляет

$$R = \max|y(t_i) - y_i| = |3.865 - 3.309| = 0.556;$$
